Prof. Dr. Alberto Cattaneo **Universität Zürich**
B. Reinold, M. Scherrer 3. Juli 2001

8. Übung zur Vorlesung

Mathematische Grundlagen für Physik und Chemie II

Aufgabe 1 (Wronski-Determinante)

1. *Definition: Es seien* $\mathbf{y_1}, ..., \mathbf{y_n}$ *Lösungen des Differentialgleichungssystems* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ *mit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Dann heisst* $W := det(\mathbf{y_1}, ..., \mathbf{y_n})$ Wronski-Determinante *der Matrixwertigen Funktion* $(\mathbf{y_1}, ..., \mathbf{y_n})(t)$

2. *Es gilt die Gleichung*
$$W' = Sp(A) \cdot W.$$
Zeigen Sie das für den Fall $n = 2$.

3. *Es seien*
$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
und
$$\mathbf{y_1}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y_2}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
gegeben. Berechnen Sie $W(t)$.

4 Punkte

Aufgabe 2 (Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen)

Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems
$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} \qquad mit \qquad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$
indem Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *von* $\mathbf{A}$ *bestimmen und den Lösungsansatz* $\mathbf{y}(t) = \mathbf{c_1}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{c_2}e^{\lambda_2 t} + \mathbf{c_3}e^{\lambda_3 t}$ *mit* $\mathbf{c_i} \in \mathbb{R}^3$ *machen. (Bestimmen Sie die Vektoren* $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}$ *durch Koeffizientenvergleich.)*

4 Punkte

Aufgabe 3 (Differentialgleichungssystem und Eigenwert)
Berechnen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcl} y_1' & = & y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & -y_1 & + & y_2 \end{array}$$

mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$, *indem Sie zuerst die Eigenwerte der zugehörigen Koeffizientenmatrix bestimmen.*

4 Punkte

Aufgabe 4 (Eliminationsverfahren)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems mit dem Eliminationsverfahren.

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_1' & = & -y_1 & + & 3y_2 & + & x \\ y_2' & = & 2y_1 & - & 2y_2 & + & e^{-x} \end{array}$$

4 Punkte