Prof. Alberto Cattaneo **Universität Zürich**
B. Reinold, M. Scherrer 3. Juli 2001

Mathematische Grundlagen für Physik und Chemie II

9. Übung
Abgabe: Dienstag, den 12. Juni 2001

Aufgabe 1 (Randwertaufgabe)
Gegeben sei die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

a) *Wie lautet die allgemeine Lösung?*

b) *Für welche Werte von ω gibt es eine Lösung, die die Randwertvorgabe*

$$y(0) = 0 \qquad y(2\pi) = 0$$

erfüllt, aber nicht trivial ist.

4 Punkte

Aufgabe 2 (Periodische Funktionen I)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen Ableitung und Stammfunktion. Bestimmen Sie, ob die Funktionen, ihre Ableitungen und Stammfunktionen periodisch, gerade oder ungerade sind. Bestimmen Sie im periodischen Fall die Fundamentalperiode.

$$f(t) = t^2 \qquad g(x) = \sin(2x)\cos(x)$$
$$h(r) = \cos(r)\, e^{\sin(r)} \qquad j(y) = \sin^2(y) + \cos^2(y)$$

4 Punkte

Aufgabe 3 (Periodische Funktionen II)
f und g seien reellwertige Funktionen, $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Zeigen Sie:

a) *Sind $f(t)$ und $g(t)$ periodisch mit Periode T, so sind auch die Funktionen $af(t) + bg(t)$, $f(t)g(t)$ und $g(f(t))$ periodisch mit Periode T.*

b) *Sind $f(t)$ und $g(t)$ gerade Funktionen, so sind auch $af(t) + bg(t)$ und $f(t)g(t)$ gerade Funktionen.*

c) *Sind $f(t)$ und $g(t)$ ungerade Funktionen, so ist $af(t) + bg(t)$ eine ungerade Funktion. $f(t)g(t)$ hingegen ist eine gerade Funktion.*

d) *Für eine ungerade Funktion $f(t)$ gilt $f(0) = 0$.*

4 Punkte

Aufgabe 4 (Abbau eines Medikamentes)
Man betrachtet den Abbau eines Medikamentes im Körper. Dabei sei

$$\begin{aligned} D(t) &:= \text{ die Konzentration im Darm zum Zeitpunkt } t \\ B(t) &:= \text{ die Konzentration im Blut zum Zeitpunkt } t \\ G(t) &:= \text{ die Konzentration im Gewebe zum Zeitpunkt } t \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass ein Austausch zwischen Darm und Blut und zwischen Blut und Darm stattfindet. Dabei ist die Abgabe proportional zur Konzentration. Die Proportionalitätskonstanten werden bezeichnet durch:

$$\begin{aligned} \alpha &:= \text{ Abgabe des Medikamentes vom Darm ins Blut} \\ \beta &:= \text{ Abgabe des Medikamentes vom Blut in den Darm} \\ \gamma &:= \text{ Abgabe des Medikamentes vom Blut ins Gewebe} \\ \delta &= \text{ Abgabe des Medikamentes vom Gewebe ins Blut} \end{aligned}$$

Ferner wird das Medikament aus dem Darm und dem Gewebe ausgeschieben, bzw. verwertet. Die Proportionalitätsfaktoren sind hier:

$$\begin{aligned} \epsilon &:= \text{ Ausscheidung aus Darm} \\ \kappa &:= \text{ Verwertung durch Gewebe} \end{aligned}$$

Wir erhalten also das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} D' &= \underbrace{-\epsilon D}_{\text{Ausscheidung}} \quad \underbrace{-\alpha D}_{\substack{\text{Abgabe} \\ \text{an Blut}}} \quad \underbrace{+\beta B}_{\substack{\text{Aufnahme} \\ \text{aus Blut}}} \\ B' &= \underbrace{\alpha D}_{\substack{\text{Aufnahme} \\ \text{aus Darm}}} \quad \underbrace{-\beta B}_{\substack{\text{Abgabe} \\ \text{an Darm}}} \quad \underbrace{+\delta G}_{\substack{\text{Aufnahme} \\ \text{aus Gewebe}}} \quad \underbrace{-\gamma B}_{\substack{\text{Abgabe} \\ \text{an Gewebe}}} \\ G' &= \underbrace{-\kappa G}_{\text{Verwertung}} \quad \underbrace{-\delta G}_{\substack{\text{Abgabe} \\ \text{an Blut}}} \quad \underbrace{+\gamma B}_{\substack{\text{Aufnahme} \\ \text{aus Blut}}} \end{aligned}$$

Berechnen Sie für die Parameter

$$\alpha := 2 \quad \beta := 2 \quad \gamma := 1 \quad \delta := 2 \quad \epsilon := 2 \quad \kappa := 2$$

a) *die allgemeine Lösung des Systems.*

b) *eine spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung*

$$D(0) = 1 \quad B(0) = 0 \quad G(0) = 0.$$

(Dies entspricht z. B. der einmaligen Einnahme einer Tablette.)

4 Punkte

(`http://www.math.unizh.ch/~reinold/Uni/SS01/Uebungen/ueb9.ps`)